

La via Severiana come modello di espansione urbana

L'articolo di Enrico Petritoli e Fabio Leccese, *The Via Severiana and the Tabula Peutingeriana: valuation of landmarks precision and town expansions*, pubblicato su Acta IMEKO nel giugno 2024, rappresenta un tentativo audace di applicare sofisticati strumenti matematici allo studio della cartografia romana antica. Il fascino di questo approccio è innegabile: la promessa di trasformare intuizioni qualitative sulla precisione della Tabula Peutingeriana in affermazioni quantitative rigorose, di catturare attraverso equazioni differenziali la dinamica complessa dell'espansione urbana romana, di sostituire la vaghezza interpretativa con la chiarezza cristallina dei numeri. Tuttavia, come vedremo attraverso un'analisi approfondita e metodica dell'apparato matematico proposto, questa promessa rimane largamente insoddisfatta, e i problemi che emergono sono tanto istruttivi quanto le ambizioni originali.

Prima di approfondire la sezione matematica dell'articolo, è necessario comprendere il contesto storico e i dati empirici su cui dovrebbe poggiare l'intera costruzione teorica. Gli autori dedicano le prime pagine a ricostruire la figura di Settimio Severo, primo imperatore romano di origine africana, nato a Leptis Magna nel 145 d.C. e asceso al potere nel 193 d.C. dopo il tumultuoso Anno dei Cinque Imperatori. La caratterizzazione è generalmente accurata: Settimio Severo fu effettivamente un riformatore militare che aumentò la paga dei soldati, espanse le legioni e intraprese ambiziose campagne in Britannia e in Oriente.

La Via Severiana viene presentata come un'infrastruttura strategica che collegava Roma verso sud-est, passando attraverso Ostia, il grande porto che fungeva da gateway commerciale verso il Mediterraneo, e proseguendo lungo la costa tirrenica attraverso le Paludi Pontine fino a Terracina e oltre. Gli autori citano Thomas Ashby, archeologo britannico attivo all'inizio del XX secolo, che condusse studi sistematici sulla campagna romana. Ashby suggerì che la strada seguisse inizialmente la linea costiera, correndo dietro le ville marittime che si affacciavano sul mare, alcune delle quali oggi si trovano circa un chilometro nell'entroterra a causa dell'avanzamento della linea di costa nel corso dei secoli.

Tuttavia, emerge qui una prima criticità fondamentale che getta un'ombra su tutto ciò che segue: la mancanza di riferimenti diretti a fonti primarie antiche. Gli autori menzionano un'iscrizione che testimonia danni causati dalle onde del mare alla strada, ma non la citano esplicitamente né forniscono riferimenti epigrafici verificabili. Non vengono citati miliari, che costituivano il sistema standard di marcatura delle distanze sulle strade romane. Non vengono menzionati passi di autori antichi che descrivano la Via Severiana. L'intera ricostruzione si basa su studiosi moderni e contemporanei del XIX e

XX secolo: Ashby, Nibby, Lanciani, Desjardin, Westphal.

Questa lacuna è particolarmente problematica perché l'intera costruzione matematica successiva presuppone che il tracciato della Via Severiana sia noto con certezza assoluta e che le posizioni dei landmarks siano determinate senza ambiguità. Se già a questo livello fondamentale esistono incertezze significative sulla localizzazione precisa della strada e delle sue stazioni, come possiamo costruire su queste fondamenta incerte un edificio di equazioni differenziali che pretendono di descrivere movimenti con precisione millimetrica?

Le Tabelle 1 e 2 forniscono i dati cruciali sui quali dovrebbe basarsi l'analisi. La Tabella 1 elenca le stazioni antiche con le distanze riportate nella Tabula:

Da Astura a Clostris: 9 miglia = 13,400 km

Da Clostris a Ad Turres Albas: 3 miglia = 4,500 km

Da Ad Turres Albas a Circeios: 12 miglia = 18,000 km

Da Circeios a Ad Turres: 4 miglia = 6,000 km

Da Ad Turres a Terracina: 9 miglia = 16,300 km

La Tabella 2 confronta queste stazioni antiche con le identificazioni moderne proposte: Torre Astura, un punto interrogativo per Clostra, San Donato per Ad Turres Albas, Torre Paola per Circeios, Torre Olevola per Ad Turres, e Terracina che conserva il nome antico. Già qui emergono problemi evidenti: una stazione su cinque non può essere localizzata con certezza. Inoltre, gli autori notano che la distanza reale tra Circeios (Torre Paola) e Terracina è di 23 miglia, non le 9 indicate nella Tabula (o forse 19, c'è confusione nel testo), suggerendo un errore di oltre il 100% o del 21% a seconda dell'interpretazione. Un'altra questione metodologica emerge dalle conversioni metriche. Gli autori convertono le miglia romane in chilometri, ma il rapporto di conversione varia leggermente: 7 miglia diventano 10,400 km (1,486 km/miglio), 9 miglia diventano 13,400 km (1,489 km/miglio), 12 miglia diventano 18,000 km (1,500 km/miglio). Queste piccole variazioni suggeriscono o che gli autori stanno usando arrotondamenti arbitrari, o che stanno tentando di compensare qualche incertezza nella definizione esatta del miglio romano. Il miglio romano standard (mille passus) era di circa 1.478,5 metri, ma esistevano variazioni regionali e temporali. In uno studio che pretende di valutare la precisione delle misurazioni antiche al livello di singole centinaia di metri, queste ambiguità metriche non possono essere ignorate.

Entriamo ora nel cuore pulsante dell'articolo, l'apparato matematico che dovrebbe trasformare osservazioni qualitative in conclusioni quantitative. Gli autori costruiscono la loro teoria in due strati concettuali: prima modellano il "movimento" dei landmarks individuali nel tempo, poi utilizzano l'equazione di Fokker-Planck per descrivere l'evoluzione della densità di popolazione.

Trascrivo in formato plain text le 15 equazioni presenti nell'articolo di Petritoli e Leccese:

Sezione 2.1 – Landmarks precision and motion

1. Vettore velocità casuale

$$\vec{s}_{_random}(t) = \begin{bmatrix} s_{_random,N}(t) \\ s_{_random,E}(t) \end{bmatrix}$$

2. Componenti del vettore velocità casuale

$$s_{_random,N}(t) = s_{_random,N}(t - \Delta t) + R_N(\Delta t) * \delta_N(\Delta t)$$

$$s_{_random,E}(t) = s_{_random,E}(t - \Delta t) + R_E(\Delta t) * \delta_E(\Delta t)$$

3. Condizione di movimento sul piano verticale

$$\delta_z(t) \approx 0$$

4. Vettore velocità di diffusione

$$\vec{s}_{_diff}(t) = \begin{cases} \sum [|r - r_i|^2 / |r - r_i|] \\ \text{per } |r - r_i| \leq d_min \end{cases}$$

5. Vettore velocità totale

$$\vec{s}_{_TOT}(t) = \vec{s}_{_random}(t) + \vec{s}_{_diff}(t)$$

6. Espressione completa del vettore velocità totale

$$s_{_TOT,N}(t) = s_{_random,N}(t - \Delta t) + R_N(\Delta t) * \delta_N(\Delta t) + \sum [|r_N - r_i,N|^2 / |r_N - r_i,N|] \text{ per } |r_N - r_i,N| \leq d_min$$

$$s_{_TOT,E}(t) = s_{_random,E}(t - \Delta t) + R_E(\Delta t) * \delta_E(\Delta t) + \sum [|r_E - r_i,E|^2 / |r_E - r_i,E|] \text{ per } |r_E - r_i,E| \leq d_min$$

Sezione 2.2 – Urban expansion

7. Equazione di Fokker-Planck

$$\partial \chi(R_NE, t) / \partial t = -\nabla [f_1(R_NE, t) * \chi(R_NE, t)] + (1/2) * |d_min| * \nabla^2 [(f_2(R_NE, t))^2 * \chi(R_NE, t)]$$

8. Definizione di $f_1(R_{NE}, t)$

$$f_1(R_{NE}, t) = \sqrt{1 - \mu(\chi)}$$

9. Definizione di $\mu(\chi)$

$$\mu(\chi) = \min(\chi, \varphi_r) / \varphi_r$$

10. Definizione di $f_2(R_{NE}, t)$

$$f_2(R_{NE}, t) = \varphi_{\alpha_1} + \varphi_{\alpha_2} * \mu(\chi)^{\varphi_{\alpha_3}}$$

11. Definizione dell'area rettangolare D

$$D = [E_a, E_b] \times [N_a, N_b]$$

12. Probabilità di densità nell'area D al tempo t

$$R_{NE} =$$

$$\iint_{\Omega}$$

{

$$-\nabla[f_1(R_{NE}, t) * \chi(R_{NE}, t)] \\ + (|d_{min}|/2) * \nabla^2[(f_2(R_{NE}, t))^2 * \chi(R_{NE}, t)]$$

}

$$dN dE$$

13. Condizione temporale per l'integrazione

$$t = t_y$$

14. Espressione estesa dell'integrale

$$R_{NE} =$$

$$\int_{N_a}^{N_b} \int_{E_a}^{E_b}$$

{

$$-\nabla[f_1(R_{NE}, t_y) * \chi(R_{NE}, t_y)] \\ + (|d_{min}|/2) * \nabla^2[(f_2(R_{NE}, t_y))^2 * \chi(R_{NE}, t_y)]$$

}

$$dN dE$$

15. Equazione finale per la densità di popolazione

$$R_{NE} =$$

$$\int_{N_a}^{N_b} \int_{E_a}^{E_b}$$

{

$$-\nabla[f_1(R_{NE}, t_y) * \chi(R_{NE}, t_y)] \\ + (|d_{min}|/2) * \nabla^2[(f_2(R_{NE}, t_y))^2 * \chi(R_{NE}, t_y)]$$

}

$$dN dE$$

Analizziamo ciascun livello con la profondità che merita.

La Componente Random: Equazioni (1) e (2)

Gli autori iniziano postulando che ogni landmark (città, stazione di posta, insediamento) possieda un vettore velocità che può essere decomposto in due componenti principali. La prima è la componente random, introdotta nell'equazione (1) nella sua forma più semplice:

$$\vec{s}_{_random}(t) = [s^N_{_random}(t), s^E_{_random}(t)]$$

Qui s^N e s^E rappresentano rispettivamente le componenti nord e est del vettore velocità nel piano orizzontale. L'equazione (3) esplicita un'assunzione fondamentale:

$$\delta_z(t) \approx 0$$

ovvero il movimento verticale è trascurabile. Questa assunzione è ragionevole nel contesto geografico: gli insediamenti possono espandersi orizzontalmente sul territorio ma difficilmente "si muovono" in altitudine in modo significativo. Tuttavia, questa apparente ragionevolezza nasconde una confusione concettuale più profonda che emergerà più chiaramente in seguito.

L'equazione (2) espande la componente random in una forma più dettagliata:

$$\vec{s}_{_random}(t) = [s^N_{_random}(t-\Delta t) + \mathcal{R}_N(\Delta t) \cdot \delta_N(\Delta t), s^E_{_random}(t-\Delta t) + \mathcal{R}_E(\Delta t) \cdot \delta_E(\Delta t)]$$

Analizziamo attentamente la struttura di questa equazione. Per ogni componente direzionale (nord o est), la velocità al tempo t è data dalla somma di tre termini:

Primo termine: $s^N_{_random}(t-\Delta t)$

Questo rappresenta la "memoria" del sistema, la velocità al tempo precedente $t-\Delta t$. Questa formulazione suggerisce un processo con inerzia, dove la direzione e l'intensità del movimento attuale dipendono dal movimento passato. In termini di processi stocastici, questo introduce una struttura di autocorrelazione temporale: il sistema non è markoviano nel senso stretto, perché il futuro non dipende solo dallo stato presente ma anche dalla storia precedente.

Matematicamente, questo tipo di dipendenza temporale suggerisce che dovremmo avere un'equazione differenziale o alle differenze finite del tipo:

$$ds/dt = f(s(t), t) + \text{rumore}$$

oppure, nella forma a differenze finite:

$$s(t) = s(t-\Delta t) + \text{incremento}$$

Tuttavia, gli autori non specificano mai quale sia la relazione funzionale esatta tra $s(t)$ e $s(t-\Delta t)$. È un'evoluzione puramente additiva? C'è un fattore di decadimento? La velocità mantiene sempre la stessa intensità o c'è dissipazione? Tutte queste domande rimangono senza risposta.

Secondo termine: $\mathcal{R}_N(\Delta t)$

Questo è descritto come "un vettore random a media zero". Qui incontriamo il primo problema terminologico serio: $\mathcal{R}_N$ è chiamato "vettore" ma compare come scalare nell'equazione (c'è un $\mathcal{R}_N$ separato per la componente nord e un $\mathcal{R}_E$ per quella est). Dovremmo quindi interpretarlo come uno scalare random estratto da una distribuzione di probabilità con media zero.

Ma quale distribuzione? Una gaussiana standard con media zero e deviazione standard unitaria? Una distribuzione uniforme centrata sullo zero? Una distribuzione di Cauchy? La scelta della distribuzione è tutt'altro che irrilevante: distribuzioni diverse hanno code diverse (probabilità di eventi estremi), proprietà di convergenza diverse, e comportamenti limite profondamente diversi.

Gli autori affermano che $\mathcal{R}$ ha "media zero", il che suggerisce che in media non c'è deriva sistematica nel movimento random. Questo è matematicamente sensato: se rappresenta fluttuazioni casuali attorno a un trend deterministico, è appropriato che la media sia zero. Ma non viene specificato nulla sulla varianza o sulla deviazione standard σ di questa distribuzione random. In un processo stocastico, la varianza controlla l'ampiezza tipica delle fluttuazioni ed è un parametro cruciale tanto quanto la media.

Consideriamo un esempio concreto per illustrare l'importanza di questa specifica. Supponiamo che $\mathcal{R}_N$ sia estratto da una distribuzione normale $N(0, \sigma^2)$. Se $\sigma = 0,1$ km/anno, le fluttuazioni tipiche nella velocità saranno dell'ordine di poche centinaia di metri all'anno, coerenti forse con piccole espansioni urbane. Se $\sigma = 10$ km/anno, stiamo parlando di movimenti dell'ordine di chilometri all'anno, che farebbero spostare un'intera città di decine di chilometri in un secolo, chiaramente irrealistico per insediamenti romani stabili. Gli autori non forniscono alcuna stima o giustificazione per σ , rendendo il modello completamente indeterminato in uno dei suoi parametri fondamentali.

Terzo termine: $\delta_N(\Delta t)$

Questo è descritto come "uno scalare algebrico che modifica la direzione". La formulazione è enigmatica. Cosa significa "scalare algebrico"? Presumibilmente si intende che δ_N può essere positivo o negativo, quindi "algebrico" nel senso di poter assumere segni diversi, in contrasto con uno scalare puramente positivo. Ma quale è il suo ruolo funzionale?

Se δ_N moltiplica il termine random $\mathcal{R}_N$, sta essenzialmente agendo come un fattore di scala variabile nel tempo. Quando $\delta_N = +1$, il termine random contribuisce positivamente alla velocità nord; quando $\delta_N = -1$, contribuisce negativamente (ovvero verso sud); quando $\delta_N = 0$, il termine random viene completamente soppresso. Matematicamente, questo introduce un'ulteriore

fonte di stocasticità: non solo la magnitudo del contributo random è casuale (attraverso $\mathcal{R}_N$), ma anche il suo "segno effettivo" può variare attraverso δ_N . Ma ancora una volta, gli autori non specificano la distribuzione di probabilità di δ_N . È una variabile binaria che assume solo valori ± 1 ? È una variabile continua uniformemente distribuita su $[-1, +1]$? Ha una dipendenza temporale specifica, ovvero $\delta_N(t)$ è correlato con $\delta_N(t-\Delta t)$? La funzione $\delta_N(\Delta t)$ suggerisce una dipendenza dall'intervallo temporale Δt , ma in che modo?

Una possibilità matematicamente coerente sarebbe interpretare δ_N come un processo di commutazione stocastico, simile a un processo telegrafico dove il sistema alterna tra stati con polarità diverse. Un'altra interpretazione potrebbe essere che δ_N rappresenti l'influenza di fattori esterni non modellizzati esplicitamente (decisioni politiche, eventi bellici, cambiamenti ambientali) che possono favorire l'espansione in una direzione piuttosto che in un'altra.

Tuttavia, tutte queste sono speculazioni da parte nostra. Gli autori non chiariscono mai il significato operativo di δ_N né come dovrebbe essere determinato in un'applicazione concreta del modello.

Struttura complessiva della componente random

Mettendo insieme i pezzi, la componente random per ciascuna direzione ha la forma:

$$s^N_{\text{random}}(t) = s^N_{\text{random}}(t-\Delta t) + \mathcal{R}_N(\Delta t) \cdot \delta_N(\Delta t)$$

Questa è essenzialmente un'equazione alle differenze finite del primo ordine con un termine stocastico moltiplicativo. Possiamo riscriverla come:

$$\Delta s^N_{\text{random}} = \mathcal{R}_N(\Delta t) \cdot \delta_N(\Delta t)$$

dove $\Delta s^N_{\text{random}} = s^N_{\text{random}}(t) - s^N_{\text{random}}(t-\Delta t)$ rappresenta la variazione della velocità nell'intervallo temporale Δt .

Questo suggerisce un modello di random walk per la velocità stessa: la velocità al tempo t è la velocità al tempo precedente più un incremento casuale. Questo è diverso da un random walk per la posizione (dove la posizione al tempo t è la posizione precedente più un incremento casuale). Qui abbiamo un random walk nello spazio delle velocità, che implica che la posizione seguirebbe un random walk di secondo ordine, matematicamente più complesso.

Per comprendere le implicazioni, consideriamo il comportamento asintotico. Se scriviamo la posizione del landmark come $x(t)$, la velocità come $v(t) = dx/dt$, e assumiamo che la velocità segua un random walk, abbiamo:

$$v(t) = v(t-\Delta t) + \eta(t)$$

dove $\eta(t) = \mathcal{R}(\Delta t) \cdot \delta(\Delta t)$ è il termine di rumore composto. Questo implica:

$$v(t) = v(0) + \sum_{i=1 \text{ to } n} \eta(i \cdot \Delta t)$$

e quindi:

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1 \text{ to } n} v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t = x(0) + \sum_{i=1 \text{ to } n} [v(0) + \sum_{j=1 \text{ to } i} \eta(j \cdot \Delta t)] \cdot \Delta t$$

Si ha a che fare con un comportamento diffusivo con varianza che cresce come t^3 piuttosto che linearmente con t come in un random walk semplice. In altre parole, l'incertezza sulla posizione del landmark crescerebbe molto rapidamente nel tempo, più rapidamente di quanto ci aspetteremmo da una semplice diffusione.

Questo ha implicazioni profonde per la "precisione" che il modello può attribuire alla posizione dei landmarks. Se stiamo modellando l'evoluzione su scale temporali di secoli (dall'epoca di Settimio Severo al Medioevo, epoca di copia della Tabula, sono circa 200-300 anni), l'incertezza cumulativa diventerebbe enorme. Gli autori non discutono mai questo aspetto.

La Componente Diffusiva: Equazione (4)

La seconda componente del movimento dei landmarks è chiamata "diffusiva" e rappresenta presumibilmente l'influenza reciproca tra insediamenti vicini. L'equazione (4) introduce questa componente:

$$\vec{s}_{diff}(t) = \sum_{i=1 \text{ to } n} |r - r_i|^3 / |r - r_i| \text{ per } |r - r_i| \leq d_{min}$$

Questa equazione è problematica a molteplici livelli e richiede un'analisi dettagliata componente per componente.

La forma funzionale cubica

Al numeratore compare $|r - r_i|^3$, il cubo della distanza tra il landmark considerato (a posizione r) e l' i -esimo landmark (a posizione r_i). Perché proprio il cubo? In fisica, le forze fondamentali seguono tipicamente leggi di potenza della distanza, ma con esponenti ben motivati da principi primi. La forza gravitazionale e quella elettrostatica seguono leggi inverse quadratiche (proporzionali a $1/r^2$), derivanti dalla geometria tridimensionale dello spazio e dal teorema di Gauss. Le forze di van der Waals seguono leggi con esponente -6. Le interazioni di scambio quantistico hanno dipendenze esponenziali.

Qui invece abbiamo una dipendenza diretta (non inversa) cubica al numeratore. Non viene fornita alcuna giustificazione fisica, sociologica, economica o storica per questa scelta funzionale specifica. Perché non $|r - r_i|^2$? O $|r - r_i|^{(3/2)}$? O una dipendenza esponenziale $\exp(-|r - r_i|/\lambda)$ con λ lunghezza caratteristica?

Per comprendere meglio, proviamo a interpretare cosa significherebbe questa dipendenza. Il termine $|r - r_i|^3$ cresce molto rapidamente con la distanza: se r e r_i sono separati di 1 km, il contributo è proporzionale a 1 km³; se sono separati di 2 km, il contributo è proporzionale a 8 km³; a 3 km, 27 km³. Questo suggerisce che landmarks più distanti contribuiscono molto più fortemente alla "velocità diffusiva" del landmark considerato.

Ma questo è controintuitivo! Normalmente ci aspetteremmo che l'influenza tra insediamenti decresca con la distanza: città vicine interagiscono più fortemente (competizione per risorse, flussi migratori, scambi commerciali) mentre città lontane hanno influenza reciproca minore. Eppure la forma

cubica al numeratore suggerisce esattamente l'opposto.

Forse gli autori intendevano scrivere $1/|r - r_i|^3$? Questo darebbe una legge inversa cubica che almeno avrebbe la proprietà qualitativa corretta di decrescere con la distanza. Ma anche in questo caso, perché cubica e non quadratica? Una legge inversa quadratica sarebbe analoga alla gravitazione e potrebbe rappresentare una sorta di "attrazione gravitazionale" tra insediamenti proporzionale alla loro "massa" (popolazione). Una legge inversa cubica decrescerebbe ancora più rapidamente, limitando l'interazione essenzialmente ai vicini più prossimi.

Il denominatore ambiguo

Al denominatore compare $|r - r_i|$, la distanza semplice (non elevata a potenza). Questo crea un'espressione complessiva che è proporzionale a:

$$|r - r_i|^3 / |r - r_i| = |r - r_i|^2$$

In altre parole, l'intera espressione si riduce semplicemente al quadrato della distanza! Questo rende la notazione originale inutilmente complessa e confusa. Se l'effetto netto è proporzionale a $|r - r_i|^2$, perché non scriverlo direttamente così?

C'è la possibilità che gli autori intendessero qualcosa di diverso. Forse il numeratore dovrebbe essere $|r - r_i|^3$ come vettore (ma questo non ha senso perché la distanza è uno scalare), o forse il denominatore dovrebbe includere un fattore direzionale. Nell'elettromagnetismo, per esempio, il campo elettrico generato da una carica ha la forma:

$$\vec{E} = k \cdot q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i) / |\vec{r} - \vec{r}_i|^3$$

dove $(\vec{r} - \vec{r}_i) / |\vec{r} - \vec{r}_i|^3$ fornisce sia la direzione (attraverso il vettore $\vec{r} - \vec{r}_i$) che la magnitudo inversa quadratica (attraverso la divisione per $|\vec{r} - \vec{r}_i|^3 = |\vec{r} - \vec{r}_i|^2 \cdot |\vec{r} - \vec{r}_i|$).

Forse gli autori intendevano qualcosa di simile? Ma se così fosse, la notazione dovrebbe distinguere chiaramente tra vettori (con frecce sopra) e scalari. L'equazione (4) come scritta è ambigua: il membro sinistro $\vec{s}_i\text{-diff}(t)$ ha la freccia indicando un vettore, ma il membro destro usa solo valori assoluti che sono scalari.

La condizione di cutoff: $|r - r_i| \leq d_{\min}$

L'intera sommatoria è soggetta alla condizione che la distanza tra landmarks sia minore o uguale a un valore di soglia $d_{\min}$, definito come "minimum reference distance" o "distanza minima di riferimento tra due landmarks". Questa condizione introduce un cutoff sharp: landmarks separati da distanze maggiori di $d_{\min}$ non interagiscono affatto, mentre quelli entro $d_{\min}$ interagiscono secondo la legge di potenza discussa sopra.

Questa discontinuità è matematicamente problematica. In fisica, le interazioni tendono a decrescere smoothly con la distanza piuttosto che

"spegnersi" bruscamente a una certa soglia. Una formulazione più realistica userebbe una funzione di cutoff smooth, per esempio:

$$\vec{s}_{diff}(t) \propto \sum_{i=1 \text{ to } n} f(|r - r_i|/d_{min}) \cdot |r - r_i|^2$$

dove $f(x)$ è una funzione che vale circa 1 per $x \ll 1$ e decade gradualmente a zero per $x \gg 1$, ad esempio $f(x) = \exp(-x^2)$ o $f(x) = 1/(1+x^2)$.

Ma il problema più serio è che d_{min} non viene mai quantificato numericamente per il caso della Via Severiana. Senza conoscere il valore di d_{min} , l'equazione (4) è completamente indeterminata. Se $d_{min} = 5$ km, solo landmarks molto vicini interagiscono. Se $d_{min} = 50$ km, l'interazione si estende su distanze regionali. Se $d_{min} = 500$ km, praticamente tutti i landmarks lungo la Via Severiana interagiscono reciprocamente. Ciascuna di queste scelte porterebbe a dinamiche completamente diverse, eppure gli autori non forniscono alcuna guida.

Interpretazione fisica e storica

Al di là dei problemi formali, c'è una questione concettuale ancora più profonda: cosa rappresenta fisicamente questa "velocità diffusiva"? Gli autori affermano che descrive come "la posizione degli altri landmarks influenza il movimento del landmark considerato", suggerendo che insediamenti tendono a "diffondersi" in modo da evitare di essere troppo vicini agli altri. Questo potrebbe rappresentare:

1) Competizione per risorse: Due città vicine competono per territorio agricolo, risorse idriche, forza lavoro. Questa competizione potrebbe generare una "pressione" che spinge gli insediamenti ad espandersi in direzioni opposte.

2) Saturazione spaziale: Se un'area ha già molti insediamenti, nuove espansioni sono costrette verso zone meno popolate.

3) Flussi migratori: Le persone si spostano da insediamenti sovrappopolati verso aree meno dense, creando gradienti di espansione.

Tutte queste interpretazioni sono plausibili ma richiederebbero parametri calibrati su dati demografici, economici e archeologici reali. Inoltre, non è chiaro perché questo effetto dovrebbe produrre una "velocità" piuttosto che una "forza" o una "pressione". In meccanica classica, le forze producono accelerazioni (variazioni di velocità), non velocità direttamente. Se gli autori intendessero veramente modellare dinamiche fisicamente analoghe, dovrebbero avere equazioni del tipo:

$$d^2r/dt^2 = F(r, \{r_i\})$$

dove F rappresenta forze di interazione, piuttosto che:

$$dr/dt = v(r, \{r_i\})$$

con velocità diretta.

La Velocità Totale: Equazione (5) e (6)

L'equazione (5) combina le due componenti:

$$\vec{s}_{TOT}(t) = \vec{s}_{random}(t) + \vec{s}_{diff}(t)$$

Questa è una semplice somma vettoriale. La velocità totale del landmark è data dalla somma della componente random (che include memoria storica più fluttuazioni casuali) e della componente diffusiva (che rappresenta l'interazione con gli altri landmarks).

L'equazione (6) espande questa espressione sostituendo le definizioni precedenti, risultando in un'equazione estremamente verbosa che occupa quasi mezza pagina. Non riprodurrò qui l'intera espressione perché, francamente, la sua complessità notazionale oscura piuttosto che illuminare il contenuto concettuale. Il problema fondamentale è che questa complessità formale non deriva da necessità fisica o storica, ma da scelte di notazione infelici e dalla mancanza di semplificazione algebrica.

Per esempio, come notato prima, se il termine diffusivo si riduce effettivamente a $|r - r_i|^2$, l'equazione potrebbe essere scritta molto più semplicemente. Inoltre, non viene mai specificato se la somma nella componente diffusiva include il landmark stesso ($i \neq$ considerato) o tutti gli n landmarks. Presumibilmente dovrebbe escludere il landmark considerato per evitare auto-interazione, ma questo non è esplicitato.

La Figura 4: Simulazioni senza Riferimento alla Realtà

La Figura 4 mostra l'evoluzione della velocità $\vec{s}_{diff}(t)$ in funzione del tempo per sistemi con 3, 5, 7 e 9 landmarks. Le curve mostrano un comportamento qualitativo comune: la velocità cresce inizialmente, raggiunge un massimo, poi decresce gradualmente. Il tempo di raggiungimento del picco aumenta con il numero di landmarks: con 3 landmarks il picco si verifica a circa $t = 0,3$ (in unità normalizzate), con 9 landmarks a circa $t = 0,5$.

Gli autori commentano: "It is noted that as the number of landmark members increases, the total speeds are always higher but are reached later." Questa è una descrizione accurata delle curve mostrate, ma cosa ci dice sulla Via Severiana reale? Assolutamente nulla, perché:

- Assi normalizzati: Sia il tempo che la velocità sono normalizzati a 1, rendendo impossibile valutare le scale effettive. Se l'unità di tempo è 1 anno, allora il picco si verifica in pochi mesi. Se l'unità di tempo è 1 secolo, il picco si verifica in decenni. Gli autori non specificano.
- Nessuna calibrazione: I parametri usati per generare queste curve non sono riportati. Quali valori di d_{min} , σ (deviazione standard di $\mathcal{R}$), distribuzione di δ sono stati usati? Impossibile saperlo.
- Nessun confronto empirico: Non viene fatto alcun tentativo di confrontare queste curve teoriche con dati archeologici sulla crescita effettiva degli

insediamenti lungo la Via Severiana in epoche diverse.

- Numeri di landmarks arbitrari: Perché 3, 5, 7, 9? La Via Severiana nelle Tabelle 1 e 2 ha 5 o 6 stazioni identificate. Perché non usare il numero effettivo con le posizioni effettive?

In sostanza, la Figura 4 dimostra che il modello matematico proposto, con parametri opportunamente scelti, può produrre curve con certe proprietà qualitative. Ma questo è un esercizio di matematica applicata, non un'analisi della Via Severiana. È come costruire un modello del sistema solare che produce orbite ellittiche senza mai verificare se le eccentricità e i periodi orbitali corrispondono a quelli osservati di Mercurio, Venere, Terra, ecc.

L'Architettura Matematica: Secondo Livello - L'Equazione di Fokker-Planck

La seconda metà dell'apparato matematico introduce l'equazione di Fokker-Planck per descrivere l'evoluzione della densità di popolazione nel tempo e nello spazio. Questa è una mossa audace: l'equazione di Fokker-Planck è uno strumento potente e sofisticato della fisica statistica, usato per descrivere l'evoluzione temporale di distribuzioni di probabilità in sistemi stocastici. Vediamo se questa audacia è giustificata dall'applicazione concreta.

L'Equazione Master: Equazione (7)

L'equazione (7) presenta la forma canonica dell'equazione di Fokker-Planck:

$$\partial p(\mathbb{R}_{NE}, t)/\partial t = -\nabla \cdot [\mathbf{f}_1(\mathbb{R}_{NE}, t) \cdot p(\mathbb{R}_{NE}, t)] + (1/2)|d_{min}| \cdot \nabla^2 [(\mathbf{f}_2(\mathbb{R}_{NE}, t))^2 \cdot p(\mathbb{R}_{NE}, t)]$$

Scomponiamo questa equazione per comprenderne struttura e significato.

Il membro sinistro: $\partial p/\partial t$

Questo rappresenta la derivata temporale della densità di popolazione p . In termini operativi, $p(\mathbb{R}_{NE}, t) \cdot dE \cdot dN$ rappresenta la probabilità di trovare popolazione nella piccola area $dE \times dN$ attorno alla posizione $\mathbb{R}_{NE} = (E, N)$ al tempo t . Alternativamente, se interpretiamo p come densità effettiva piuttosto che probabilità, $p(\mathbb{R}_{NE}, t)$ rappresenta il numero di abitanti per unità di area nella posizione $\mathbb{R}_{NE}$ al tempo t .

La derivata temporale $\partial p/\partial t$ descrive come questa densità cambia nel tempo. Se $\partial p/\partial t > 0$ in una certa posizione, la popolazione in quell'area sta crescendo; se $\partial p/\partial t < 0$, sta decrescendo. L'equazione nel suo complesso descrive quindi la dinamica redistributiva della popolazione sul territorio.

Il primo termine del membro destro: il drift deterministico

Il termine $-\nabla \cdot [\mathbf{f}_1(\mathbb{R}_{NE}, t) \cdot p(\mathbb{R}_{NE}, t)]$ rappresenta il contributo deterministico al cambiamento di densità. Per comprenderne il significato, ricordiamo che in notazione vettoriale, per un campo vettoriale $\mathbf{J}$, la divergenza $\nabla \cdot \mathbf{J}$ in coordinate cartesiane è:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \partial J_E / \partial E + \partial J_N / \partial N$$

Il termine $\mathbf{f}_1 \cdot \rho$ può essere interpretato come un flusso di popolazione: $\mathbf{f}_1$ è un campo vettoriale che descrive la "direzione di movimento preferenziale" della popolazione, e moltiplicandolo per ρ otteniamo il flusso effettivo (persone per unità di tempo attraverso un'unità di lunghezza di confine).

Il segno negativo davanti alla divergenza è cruciale. L'equazione di continuità in fisica ha la forma generale:

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

che esprime la conservazione della densità: se la divergenza del flusso è positiva in un punto (più flusso esce che entra), la densità in quel punto deve diminuire. Riarrangiando:

$$\partial \rho / \partial t = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

che è esattamente la struttura del primo termine dell'equazione (7), con $\mathbf{J} = \mathbf{f}_1 \cdot \rho$.

Questo significa che $\mathbf{f}_1$ controlla la direzione e l'intensità del flusso deterministico di popolazione. Se $\mathbf{f}_1$ punta verso est in una certa regione, la popolazione tenderà a spostarsi verso est, creando una diminuzione di densità nelle aree occidentali e un aumento in quelle orientali.

Il secondo termine: la diffusione stocastica

Il termine $(1/2)|d_{\min}| \cdot \nabla^2 [(\mathbf{f}_2)^2 \cdot \rho]$ rappresenta il contributo diffusivo. Il laplaciano $\nabla^2 = \partial^2 / \partial E^2 + \partial^2 / \partial N^2$ misura la curvatura locale della densità. Questo termine descrive processi diffusivi dove la popolazione si sposta da regioni di alta densità a regioni di bassa densità, analogamente alla diffusione termica descritta dall'equazione del calore.

Il coefficiente $(1/2)|d_{\min}|$ è particolarmente interessante. Gli autori usano $|d_{\min}|$, il valore assoluto della distanza minima definita precedentemente. Questo è strano perché $d_{\min}$ dovrebbe essere sempre positivo essendo una distanza. Perché usare il valore assoluto? È un hint che $d_{\min}$ potrebbe assumere significati diversi in contesti diversi, alcuni dei quali potrebbero renderlo negativo o indefinito?

Il fattore $(\mathbf{f}_2)^2$ moltiplica la densità ρ prima dell'applicazione del laplaciano. Questo introduce una diffusività dipendente dallo stato: il coefficiente di diffusione effettivo non è costante ma dipende dalla posizione e dal tempo attraverso $\mathbf{f}_2$. Questa è una caratteristica delle equazioni di Fokker-Planck non lineari, matematicamente molto più complesse delle versioni lineari.

Confronto con forme standard

La forma più comune dell'equazione di Fokker-Planck è:

$$\partial \rho / \partial t = -\nabla \cdot [\mu(x,t) \cdot \rho] + (1/2) \nabla \cdot [D(x,t) \cdot \nabla \rho]$$

dove μ è il drift coefficient e D è il diffusion coefficient. Riscrivendo il secondo termine:

$$(1/2)\nabla\cdot[D\cdot\nabla\rho] = (1/2)D\cdot\nabla^2\rho + (1/2)(\nabla D)\cdot(\nabla\rho)$$

Se D è costante nello spazio, il secondo termine scompare e otteniamo semplicemente $(1/2)D\cdot\nabla^2\rho$.

Gli autori invece scrivono:

$$(1/2)|d_{\min}|\cdot\nabla^2[(f_2)^2\cdot\rho]$$

Espandendo:

$$= (1/2)|d_{\min}|\cdot[(f_2)^2\cdot\nabla^2\rho + 2f_2(\nabla f_2)\cdot(\nabla\rho) + \rho\cdot\nabla^2(f_2)^2]$$

Questo è significativamente più complicato della forma standard e introduce termini accoppiati tra i gradienti di ρ e f_2 . Matematicamente, questo potrebbe generare comportamenti interessanti come aggregazione spontanea o pattern formation, ma gli autori non discutono mai queste possibilità né le conseguenze della loro scelta funzionale specifica.

Le Funzioni Ausiliarie: Equazioni (8), (9), (10)

Le funzioni f_1 e f_2 che controllano drift e diffusione sono definite attraverso tre equazioni interconnesse.

Equazione (8): il drift come funzione della densità

$$f_1(R_{NE}, t) = \sqrt{[1 - \mu(\rho)]}$$

Questa è una scelta funzionale molto specifica e non standard. In modelli classici di dinamica di popolazioni, il drift è spesso costante o lineare nella densità. Qui invece abbiamo una radice quadrata di $(1 - \mu)$, dove μ è a sua volta una funzione della densità definita nell'equazione (9).

Analizziamo le proprietà di questa funzione. Quando $\mu = 0$ (densità molto bassa), abbiamo $f_1 = 1$, il valore massimo. Quando $\mu \rightarrow 1$ (densità si avvicina al massimo), $f_1 \rightarrow 0$. Questo significa che il drift deterministico è massimo quando la densità è bassa e si annulla quando la densità raggiunge il suo valore massimo.

Questa è un'interpretazione ragionevole: in aree poco popolate c'è "spazio" per l'espansione e quindi un forte drift verso l'espansione; in aree sature, il drift si ferma perché non c'è più spazio disponibile. La forma a radice quadrata implica che il drift decresce più lentamente all'inizio (per densità basse) e più rapidamente vicino alla saturazione.

Tuttavia, c'è un problema concettuale: f_1 è descritto come un campo vettoriale che dovrebbe avere componenti direzionali (nord, est), ma l'equazione (8) produce uno scalare. Come si trasforma questo scalare in un vettore con direzione? Gli autori non lo specificano mai. Presumibilmente, ci dovrebbe essere un fattore direzionale aggiuntivo, qualcosa come:

$$\vec{f}_1 = \sqrt{[1 - \mu(\rho)]}\cdot\hat{n}$$

dove $\hat{n}$ è un versore che specifica la direzione preferenziale di espansione. Ma quale direzione? Verso il gradiente decrescente di densità? Verso landmark vicini? Lungo la Via Severiana? Questa ambiguità rende l'equazione

operativamente indefinita.

Equazione (9): la funzione di saturazione

$$\mu(\rho) = \min(\rho, \varphi_r) / \varphi_r$$

Questa funzione normalizza la densità rispetto a un valore di riferimento φ_r , descritto come "la massima densità attesa nell'area". La funzione $\min$ garantisce che μ non possa superare 1 anche se per qualche ragione la densità effettiva ρ superasse φ_r .

Quando $\rho \ll \varphi_r$, abbiamo $\mu \approx \rho / \varphi_r$, una relazione lineare. Quando $\rho = \varphi_r$, otteniamo $\mu = 1$, saturazione completa. Questa è una funzione di saturazione semplice e ragionevole, concettualmente simile a modelli logistici di crescita di popolazione.

Il problema è: cosa rappresenta φ_r fisicamente per gli insediamenti romani lungo la Via Severiana? È la densità di popolazione massima sostenibile data la tecnologia agricola romana? È limitata dalla disponibilità di acqua? Da considerazioni difensive? Dalla capacità di trasporto della strada stessa?

Dalla Tabella 3, vediamo che $\varphi_r = 0,0066$. Ma 0,0066 cosa? Abitanti per metro quadrato? Per chilometro quadrato? Per miglio romano quadrato? Gli autori non specificano le unità, rendendo questo numero completamente privo di significato.

Per contestualizzare: Roma antica al suo apice aveva circa 1 milione di abitanti su un'area di circa 15 km², dando una densità di circa 67.000 abitanti/km² = 0,067 abitanti/m². Le città moderne dense hanno densità simili o superiori. Se $\varphi_r = 0,0066$ abitanti/m², significherebbe una densità massima circa 10 volte inferiore a quella della Roma imperiale, forse rappresentativa di piccoli centri rurali. Ma sono solo speculazioni in assenza di specificazioni chiare.

Equazione (10): il coefficiente di diffusione

$$f_2(\mathbb{R}_{NE}, t) = \varphi_{a1} + \varphi_{a2} \cdot \mu(\rho)^{(\varphi_{a3})}$$

Questa funzione controlla l'intensità della diffusione stocastica. Ha tre parametri liberi: φ_{a1} , φ_{a2} , φ_{a3} . La struttura è:

$$f_2 = \text{costante} + \text{termine_dipendente_da_densità}$$

dove il termine dipendente dalla densità ha la forma $\varphi_{a2} \cdot [\rho / \varphi_r]^{(\varphi_{a3})}$ quando $\rho < \varphi_r$.

Analizziamo i limiti:

Densità bassa ($\rho \rightarrow 0$): $\mu \rightarrow 0$, quindi $\mu^{(\varphi_{a3})} \rightarrow 0$, e $f_2 \rightarrow \varphi_{a1}$. La diffusione è minima e dominata dal termine costante.

Densità alta ($\rho \rightarrow \varphi_r$): $\mu \rightarrow 1$, quindi $\mu^{(\varphi_{a3})} \rightarrow 1$, e $f_2 \rightarrow \varphi_{a1} + \varphi_{a2}$. La diffusione è massima.

Questo comportamento è controintuitivo rispetto a molti modelli di diffusione. Tipicamente, ci aspetteremmo che la diffusione sia maggiore quando ci sono grandi gradienti di densità (molta gente in un'area, poca in un'altra), non semplicemente quando la densità assoluta è alta. Il modello qui proposto suggerisce che la "randomness" del movimento aumenta con la densità: popolazioni dense si comportano in modo più stocastico che popolazioni sparse.

Una possibile interpretazione: in centri urbani densi, c'è maggiore mobilità, più opportunità economiche diverse, più varietà nelle scelte individuali, quindi maggiore componente stocastica nel movimento complessivo. In aree rurali sparse, i movimenti sono più deterministici, guidati da necessità agricole stagionali o da pattern migratori stabili. Questa è un'interpretazione post-hoc plausibile, ma gli autori non la propongono né la giustificano.

L'esponente misterioso φ_{a3}

L'esponente φ_{a3} controlla come la diffusività scala con la densità. Dalla Tabella 3, $\varphi_{a3} = 0,099 \approx 0,1 \approx 1/10$. Un esponente frazionario piccolo significa che la dipendenza dalla densità è sublineare e molto debole.

Consideriamo alcuni valori concreti: se $\mu = 0,5$ (densità al 50% del massimo), allora $\mu^{0,1} \approx 0,933$, non molto diverso da 1. Se $\mu = 0,1$ (densità al 10%), $\mu^{0,1} \approx 0,794$. La funzione $\mu^{0,1}$ varia molto lentamente, rimangendo vicina a 1 per un ampio range di valori di μ .

Questo significa che, in pratica, il termine $\varphi_{a2} \cdot \mu^{(\varphi_{a3})}$ è quasi costante e vicino a φ_{a2} . Con $\varphi_{a2} = 5$ (dalla Tabella 3), la variazione effettiva è tra circa 0 (per $\mu = 0$) e 5 (per $\mu = 1$), ma la maggior parte di questa variazione avviene solo per densità bassissime.

Perché scegliere un esponente così piccolo? Forse per evitare che la diffusività vari troppo drammaticamente con la densità, mantenendo il sistema relativamente stabile. Forse perché valori più grandi rendevano le simulazioni numericamente instabili. O forse semplicemente perché produceva curve che "sembravano giuste". In assenza di giustificazioni, non possiamo saperlo.

I Parametri Numerici: La Tabella 3 e il Problema dell'Arbitrarietà

La Tabella 3 riporta i valori numerici usati nella simulazione:

$$\varphi_r = 0,0066$$

$$\varphi_{a1} = 0,715$$

$$\varphi_{a2} = 5$$

$$\varphi_{a3} = 0,099$$

Questi quattro numeri determinano completamente il comportamento del

modello di Fokker-Planck. Eppure, come già menzionato, nessuno di questi valori viene giustificato in alcun modo. Non c'è alcuna spiegazione su:

Come sono stati scelti: Derivano da fit a dati archeologici? Da analogie con altri sistemi? Da considerazioni teoriche? Da trial-and-error per produrre grafici esteticamente piacevoli?

Cosa rappresentano fisicamente: Quali sono le unità di misura? φ_r dovrebbe avere unità di densità (abitanti/area), φ_{a1} e φ_{a2} dovrebbero avere unità di diffusività (area/tempo), φ_{a3} è adimensionale. Ma i valori concreti corrispondono a scale fisiche ragionevoli?

Sensibilità dei risultati: Cosa succederebbe se $\varphi_r = 0,0033$ (metà del valore scelto) o $\varphi_r = 0,0132$ (doppio)? I risultati qualitativi cambiano drasticamente o il sistema è robusto?

Validazione: Esistono dati indipendenti che confermano che questi valori sono ragionevoli per insediamenti romani del II-III secolo?

L'assenza di risposte a queste domande è letale per la validità scientifica del modello. In fisica o ingegneria, quando si propone un modello con parametri liberi, si seguono due approcci standard:

1) Derivazione da primi principi: I parametri sono calcolati da leggi fondamentali conosciute. Ad esempio, il coefficiente di diffusione termica può essere calcolato da teoria cinetica conoscendo massa molecolare e sezione d'urto.

2) Fitting empirico: I parametri sono determinati attraverso regressione statistica su dati sperimentali, con stima degli errori e intervalli di confidenza.

Gli autori non fanno né l'una né l'altra cosa. I parametri sembrano scelti ad hoc, trasformando il modello in un esercizio di curve-fitting senza vincoli, dove si possono ottenere praticamente qualsiasi comportamento desiderato manipolando opportunamente quattro (o più) parametri liberi.

Questo è il fenomeno che i fisici chiamano ironicamente "physics by parameter adjustment": con abbastanza parametri liberi, puoi fittare anche un elefante (come disse il fisico Enrico Fermi, o secondo alcune fonti John von Neumann). Il problema non è che il modello produce risultati, ma che senza vincoli empirici questi risultati non hanno valore predittivo o esplicativo.

L'Integrazione Spaziale: Equazioni (11)-(15)

Gli autori procedono poi a integrare l'equazione di Fokker-Planck su una regione rettangolare dello spazio, definita nell'equazione (11) come:

$$D = [E_a, E_b] \times [N_a, N_b]$$

dove E rappresenta la coordinata est e N la coordinata nord. Questo è un dominio rettangolare con lati paralleli agli assi cardinali, forse rappresentante un segmento della regione attraversata dalla Via Severiana.

L'equazione (12) integra l'equazione (7) su questo dominio:

$$\iint_D [\partial \rho / \partial t] dN dE = \iint_D [-\nabla \cdot (\mathbf{f}_1 \cdot \rho) + (1/2)|d_{\min}| \cdot \nabla^2 ((\mathbf{f}_2)^2 \cdot \rho)] dN dE$$

Questa è un'operazione matematicamente corretta. Il membro sinistro rappresenta il tasso di variazione della popolazione totale nella regione D. Il membro destro può essere semplificato usando il teorema della divergenza (o teorema di Gauss in due dimensioni):

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{n} dl$$

dove ∂D è il confine del dominio D, $\hat{n}$ è la normale esterna, e dl è l'elemento di lunghezza lungo il confine.

Applicando questo al primo termine:

$$\iint_D \nabla \cdot (\mathbf{f}_1 \cdot \rho) dN dE = \oint_{\partial D} (\mathbf{f}_1 \cdot \rho) \cdot \hat{n} dl$$

Questo rappresenta il flusso netto di popolazione attraverso il confine della regione. Se positivo, più persone escono che entrano; se negativo, più persone entrano che escono.

Il secondo termine con il laplaciano può essere trattato similmente, applicando il teorema della divergenza due volte o usando identità vettoriali appropriate. Il risultato netto esprime la variazione di popolazione nella regione in termini di flussi attraverso i suoi confini.

L'introduzione del tempo discreto: Equazione (13)

L'equazione (13) introduce un tempo specifico:

$$t = t_y$$

Gli autori non spiegano il significato di t_y né perché sia necessario introdurre questa notazione. È un tempo arbitrario scelto per valutare l'integrale? È un tempo caratteristico del sistema? Un tempo di osservazione sperimentale?

L'equazione (14) semplicemente riscrive l'equazione (12) sostituendo t con t_y , senza aggiungere contenuto nuovo. L'equazione (15) espande esplicitamente l'integrale doppio come due integrali iterati:

$$\int_{N_a}^{N_b} \int_{E_a}^{E_b} (...) dN dE$$

Questa è una riscrittura notazionale del teorema di Fubini, che permette di scambiare l'ordine di integrazione per integrali doppi sotto condizioni di regolarità appropriate.

Il problema è che questa sequenza di equazioni (12)-(15) non porta a nessuna conclusione concreta. Gli autori non:

- Risolvono effettivamente gli integrali per configurazioni specifiche
- Applicano condizioni al contorno derivate dalla geometria della Via Severiana
- Confrontano i risultati con distribuzioni di popolazione archeologicamente documentate
- Usano questi risultati per validare o falsificare il modello

Le equazioni rimangono esercizi formali di manipolazione simbolica senza connessione con applicazioni concrete.

La Simulazione e l'"Effetto Splashdown": Figura 5

La Figura 5, che dovrebbe essere il culmine dell'analisi matematica, mostra la "densità di probabilità in funzione delle direzioni superficiali" (traduzione letterale di "Density of probability vs surface directions"). Il grafico presenta una superficie tridimensionale con un picco centrale che decresce simmetricamente verso i bordi, simile a una goccia d'acqua che cade in uno stagno ("splashdown effect").

Gli autori commentano: "Highlights a sort of 'splashdown', meaning that diffusion occurs as if it were liquid, i.e. with an ever-increasing density, from the centre towards the edge... the density is constant in the centre or the historical centre or first aggregation of the city and then thins out towards the edges."

Questa descrizione contiene una contraddizione: prima affermano che la densità è "ever-increasing" dal centro verso il bordo, poi immediatamente dicono che la densità è "constant in the centre" e "thins out towards the edges", che significa esattamente l'opposto (decrescente dal centro verso il bordo).

Interpretando la figura, appare chiaro che intendono la seconda descrizione: densità massima al centro che decresce verso la periferia. Questo è qualitativamente coerente con la struttura tipica degli insediamenti urbani premoderni, dove il centro storico ha la massima densità abitativa e la densità decresce verso la campagna circostante.

Tuttavia, diversi problemi critici emergono:

Mancanza di scala: Gli assi sono etichettati "Surface E direction" e "Surface N direction" senza unità o valori numerici. La dimensione spaziale rappresentata potrebbe essere 1 km × 1 km o 100 km × 100 km, non abbiamo modo di saperlo.

Simmetria perfetta: La distribuzione è perfettamente simmetrica, con forma approssimativamente gaussiana o lorentziana. Questo è altamente irrealistico per insediamenti reali, che sono sempre influenzati da asimmetrie topografiche (colline, fiumi, coste), dalla direzione delle strade, dalla distribuzione di risorse. La Via Severiana stessa, correndo lungo la costa, dovrebbe introdurre una forte anisotropia con espansione preferenziale parallela alla strada, ma questo non appare nella figura.

Nessun confronto empirico: La figura non viene mai confrontata con mappe archeologiche reali della distribuzione di insediamenti lungo la Via Severiana. Esistono survey archeologici che hanno documentato la densità di ritrovamenti (ceramica, strutture, tombe) lungo il percorso? Se sì, la distribuzione teorica è coerente con quella osservata?

Parametri di simulazione sconosciuti: Quali valori sono stati usati per generare questa figura? Presumibilmente i valori della Tabella 3, ma su quale dominio spaziale? Con quali condizioni iniziali e al contorno? Per quanto tempo è stata fatta evolvere la simulazione?

In assenza di queste informazioni, la Figura 5 dimostra semplicemente che l'equazione di Fokker-Planck con opportune condizioni e parametri può produrre distribuzioni con un picco centrale. Questo è matematicamente corretto ma storicamente e archeologicamente vuoto.

Problemi Concettuali Fondamentali: Cosa Significa "Movimento" di un Landmark?

Attraverso tutta l'analisi matematica, ho deliberatamente evitato di affrontare frontalmente la questione concettuale più profonda e problematica dell'intero lavoro: cosa significa che un landmark "si muove"?

Gli autori introducono velocità, accelerazioni, forze (implicitamente) per landmarks descritti come "città" o "stazioni". Scrivono equazioni che descrivono come questi landmarks cambiano posizione nel tempo. Ma le città romane non si muovevano letteralmente attraverso il paesaggio come oggetti fisici!

Ci sono diverse interpretazioni possibili di cosa gli autori intendano:

Interpretazione 1: Spostamento fisico degli insediamenti

Occasionalmente nella storia, gli insediamenti sono stati effettivamente abbandonati e ricostruiti in posizioni vicine ma distinte. Questo potrebbe avvenire per:

- Disastri naturali: Un'alluvione distrugge un villaggio vicino al fiume, che viene ricostruito su terreno più elevato a 500 metri di distanza.
- Motivi strategici: Una città viene spostata per ragioni difensive o per sfruttare una nuova strada.
- Esaurimento risorse: Un insediamento minerario viene abbandonato quando la miniera si esaurisce e la popolazione si sposta verso nuove miniere.
- Cambiamenti geomorfologici: L'insabbiamento di un porto (come avvenne parzialmente a Ostia) può causare lo spostamento del centro di attività economica.

Questi fenomeni sono reali e documentati archeologicamente. Tuttavia, avvengono su scale temporali di decenni o secoli, non con "velocità" continue misurabili anno per anno. Sono eventi discreti e discontinui, non processi diffusivi continui descrivibili con equazioni differenziali.

Inoltre, lungo la Via Severiana non esiste documentazione archeologica

sistematica di tali spostamenti. Le città principali menzionate (Ostia, Terracina) occupano sostanzialmente le stesse posizioni da millenni. Piccoli spostamenti di poche centinaia di metri del centro abitato potrebbero essere avvenuti, ma rappresenterebbero "rumori" minori rispetto alle distanze di decine di chilometri tra le stazioni principali.

Se questa fosse l'interpretazione intesa dagli autori, dovrebbero fornire evidenze archeologiche specifiche di questi spostamenti: stratigrafie che mostrano abbandono di un sito e contemporanea occupazione di un sito vicino, analisi ceramologiche che datano il cambiamento, fonti storiche che lo documentano. Nulla di tutto questo viene presentato.

Interpretazione 2: Deriva interpretativa moderna

Una seconda interpretazione, forse più vicina a ciò che gli autori intendono implicitamente, è che il "movimento" rappresenti l'incertezza e la variabilità nell'identificazione moderna della posizione antica. In altre parole:

Uno studioso del XIX secolo identifica "Clostra" con un sito archeologico specifico.

Uno studioso del XX secolo, con nuove evidenze, propone un'identificazione diversa a 2 km di distanza.

Uno studioso del XXI secolo, con tecniche di survey aereo, suggerisce una terza posizione.

Questo crea l'apparenza di un "movimento" del landmark, ma in realtà riflette l'evoluzione della conoscenza storica e archeologica, non un fenomeno fisico reale. È un artefatto epistemologico, non ontologico.

Se questa è l'interpretazione corretta, allora ciò che gli autori stanno realmente modellando è l'evoluzione dell'incertezza nelle nostre identificazioni, non il movimento reale degli insediamenti. Questo sarebbe un progetto legittimo e potenzialmente interessante, ma richiederebbe un framework completamente diverso:

- a) Un modello bayesiano dove si aggiorna la probabilità di identificazione man mano che nuove evidenze emergono
- b) Un'analisi della letteratura archeologica per quantificare come le identificazioni proposte siano cambiate nel tempo
- c) Una metrica di "consenso scientifico" che misuri quanti studiosi concordano su una data identificazione

Gli autori non fanno nulla di tutto questo. Non citano nemmeno la letteratura archeologica che documenta l'evoluzione delle identificazioni.

Interpretazione 3: Espansione e contrazione spaziale

Una terza interpretazione è che il "movimento" rappresenti il cambiamento nel "centro di massa" demografico dell'insediamento dovuto a espansione o contrazione. Per esempio:

Nel 200 d.C., una città ha 5.000 abitanti concentrati in un'area di 0,5 km² centrata sulla posizione (x_0, y_0).

Nel 300 d.C., la città è cresciuta a 10.000 abitanti distribuiti su 2 km², con nuovo sviluppo preferenziale verso est.

Il baricentro demografico si è quindi "spostato" di qualche centinaio di metri verso est, anche se il nucleo originale rimane al suo posto.

Questo è un fenomeno reale e documentabile, almeno in principio. Le città crescono in modo anisotropo, influenzate da topografia, strade, proprietà fondiarie. Il "centro" effettivo di attività economica e demografica può spostarsi nel tempo.

Tuttavia, per modellare questo fenomeno correttamente, servirebbero:

- Dati demografici archeologici dettagliati su diverse epoche (censimenti, numero di abitazioni, estensione dell'area abitata)
- Mappe della distribuzione spaziale della popolazione all'interno di ogni insediamento in periodi diversi
- Una teoria esplicita di come il "centro" viene definito (centro geometrico? Centro di densità? Centro di attività economica?)

Gli autori non forniscono nessuno di questi elementi. L'equazione di Fokker-Planck che introducono descrive la distribuzione spaziale della popolazione, non il movimento di un "centro" discreto.

Interpretazione 4: Confusione concettuale

La quarta interpretazione, che temo sia quella più accurata, è che gli autori abbiano semplicemente confuso diversi livelli di descrizione: il movimento di individui, la crescita di insediamenti, l'incertezza nelle identificazioni, e il cambiamento cartografico, trattandoli tutti come se fossero aspetti dello stesso fenomeno modellabile con velocità vettoriali.

Questa confusione concettuale è fatale per la coerenza teorica del lavoro. Un modello matematico rigoroso richiede chiarezza assoluta su cosa rappresentino le variabili: se $x(t)$ è la posizione di un landmark, deve essere chiaro cosa significa "posizione" in modo univoco e operativo. Deve essere possibile, almeno in principio, misurare $x(t)$ attraverso osservazioni concrete.

Nel lavoro di Petritoli e Leccese, questa chiarezza manca completamente. Le equazioni (1)-(6) introducono velocità e accelerazioni per entità (landmarks) che non hanno definizione operativa chiara. È come scrivere equazioni del moto per il "concetto di giustizia" o per la "felicità media": si può fare

formalmente, ma senza significato concreto le equazioni rimangono giochi simbolici vuoti.

L'Assenza di Validazione Empirica: Il Peccato Originale dello Studio

Forse la critica più seria che si possa muovere a questo lavoro è l'assenza totale di validazione empirica. In tutta l'estensione dell'articolo, non viene mai fatto un singolo confronto quantitativo tra predizioni del modello e osservazioni reali.

Consideriamo cosa sarebbe stato necessario per una validazione minimale:

Validazione del modello di movimento dei landmarks

Per validare le equazioni (1)-(6), gli autori avrebbero dovuto:

- Identificare le posizioni dei landmarks in almeno tre epoche diverse. Per esempio: epoca di Settimio Severo (200 d.C.), epoca della Tabula originale (400 d.C.), epoca medievale (1200 d.C.).
- Quantificare gli spostamenti osservati. Se "Clostra" è identificata in una posizione nel 200 d.C. e in un'altra nel 400 d.C., misurare la distanza e la direzione dello spostamento.
- Stimare i parametri del modello usando i dati delle prime due epoche. Attraverso tecniche di fitting statistico (minimi quadrati, maximum likelihood, metodi bayesiani), determinare i valori ottimali di σ (deviazione standard di $\mathcal{R}$), la distribuzione di δ , il valore di $d_{\min}$, etc.
- Fare predizioni per la terza epoca usando il modello calibrato. Se il modello è valido, dovrebbe predire correttamente (entro errori ragionevoli) le posizioni osservate nel 1200 d.C.
- Quantificare la bontà del fit usando metriche standard come R^2 , errore quadratico medio, chi-quadro, etc.

Niente di tutto questo viene fatto. Le Figure 4 e 5 mostrano simulazioni con parametri arbitrari che producono curve qualitative, ma nessun confronto con traiettorie reali di landmarks.

Validazione del modello di Fokker-Planck

Per validare l'equazione (7) e le sue conseguenze, gli autori avrebbero dovuto:

- Raccogliere dati demografici archeologici. Quanti insediamenti esistevano lungo la Via Severiana in epoche diverse? Qual era la loro popolazione stimata (da estensione dell'area abitata, numero di strutture, capacità di necropoli, etc.)?
- Costruire mappe di densità empiriche. Usando survey archeologici, costruire mappe che mostrino la densità di insediamenti e la distribuzione di popolazione lungo il percorso della strada in epoche diverse.

- Confrontare con le predizioni del modello. La Figura 5 mostra una distribuzione teorica; questa distribuzione corrisponde quantitativamente a quella osservata archeologicamente?
- Testare predizioni specifiche. Il modello di Fokker-Planck fa predizioni su come la distribuzione dovrebbe evolvere. Per esempio, se partiamo da una distribuzione molto concentrata (tutto attorno a Ostia) nel 100 a.C., il modello dovrebbe predire come questa si espande nei secoli successivi. Questo corrisponde a ciò che osserviamo?
- Analisi di sensibilità. Come cambiano le predizioni se i parametri della Tabella 3 vengono variati del $\pm 20\%$? Se piccole variazioni nei parametri producono cambiamenti drammatici nei risultati, il modello non è robusto e ha scarso potere predittivo.

Ancora una volta, niente di tutto questo viene fatto. I parametri della Tabella 3 sono semplicemente dichiarati senza giustificazione, e le simulazioni vengono presentate come se fossero auto-validanti.

Il confronto con la Tabula: promesse non mantenute

Il titolo dell'articolo promette una "valutazione della precisione dei landmarks" sulla Tabula. Cosa sarebbe stato necessario per mantenere questa promessa? Ecco i passaggi fondamentali:

1) Georeferenziazione sistematica della Tabula. Usando GIS moderni, ogni località rappresentata sulla Tabula dovrebbe essere associata a coordinate geografiche moderne, con stima dell'incertezza.

2) Misurazione delle distanze. Per ogni segmento di strada (per esempio, da Ostia a Clostra, da Clostra ad Turres Albas, etc.), misurare:

La distanza riportata sulla Tabula (in miglia romane)

La distanza geodetica reale tra le identificazioni moderne più probabili

La differenza tra le due (errore assoluto)

L'errore percentuale

3) Analisi statistica degli errori. Costruire una distribuzione degli errori per tutti i segmenti. Calcolare:

Errore medio (bias sistematico?)

Deviazione standard (precisione tipica)

Correlazioni (gli errori sono maggiori per segmenti più lunghi? Per regioni geografiche specifiche?)

4) Confronto con altre fonti. Come si confronta la precisione della Tabula con altri documenti cartografici antichi? Con gli itinerari scritti come l'Itinerarium Antonini? Con le distanze riportate da autori antichi?

5) Modellazione degli errori. Se troviamo pattern sistematici negli errori (per esempio, la Tabula sistematicamente sovrastima le distanze nord-sud e sottostima quelle est-ovest), questo potrebbe illuminare il processo di

costruzione della mappa.

Il lavoro di Petritoli e Leccese presenta alcune distanze nelle Tabelle 1 e 2, nota una discrepanza del 21% in un caso, e poi... niente. Non c'è analisi statistica, non c'è quantificazione sistematica, non c'è confronto con altre fonti. Invece, saltano direttamente a modelli matematici astratti che presumono precisione senza averla prima misurata.

L'Uso Inappropriato dell'Equazione di Fokker-Planck

L'equazione di Fokker-Planck è uno strumento potente e bello della fisica statistica, con una storia ricca che risale al lavoro di Adriaan Fokker (1913) e Max Planck (1917) sulla diffusione browniana. È stata applicata con successo in contesti che vanno dalla fisica delle particelle alla finanza quantitativa. Tuttavia, la sua applicabilità richiede condizioni specifiche che è importante esaminare nel contesto di questo studio.

I requisiti per l'applicabilità di Fokker-Planck

L'equazione di Fokker-Planck descrive l'evoluzione temporale di una distribuzione di probabilità $p(x, t)$ per un sistema stocastico. Deriva rigorosamente da assunzioni specifiche:

Processo markoviano: Il futuro del sistema dipende solo dal suo stato presente, non dalla storia passata. Matematicamente, $P(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_0) = P(x_t | x_{t-1})$.

Per insediamenti urbani, questa assunzione è chiaramente violata. La storia di una città (guerre passate, epidemie, periodi di prosperità) influenza profondamente il suo sviluppo futuro in modi che non possono essere catturati solo dallo "stato presente". Roma è Roma anche per la sua storia millenaria, non solo per la sua popolazione attuale.

Continuità temporale: il processo evolve continuamente nel tempo, non attraverso salti discontinui.

Nella realtà, lo sviluppo urbano è pieno di discontinuità: una guerra distrugge una città in giorni, una peste dimezza la popolazione in mesi, una decisione imperiale di costruire un nuovo porto trasforma l'economia regionale improvvisamente.

Trattare questi processi come continui è un'approssimazione che può essere giustificabile su scale temporali molto lunghe, ma richiede giustificazione esplicita.

Separazione di scale: le fluttuazioni microscopiche (movimenti individuali) sono molto più rapide delle variazioni macroscopiche (cambiamenti nella distribuzione di popolazione complessiva).

Questo è ragionevole: le persone si muovono giornalmente, mentre le distribuzioni di popolazione cambiano su decenni. Ma richiede che il modello microscopico (i movimenti individuali che generano il drift e la diffusione) sia specificato chiaramente. Gli autori non forniscono mai questo livello

microscopico di descrizione.

Omogeneità statistica: le leggi che governano il processo non cambiano qualitativamente nel dominio e nel periodo considerati.

Questo è gravemente violato per lo sviluppo urbano romano attraverso secoli. Le tecnologie agricole cambiarono, le strutture politiche e amministrative si trasformarono, le reti commerciali si riorganizzarono, le religioni dominanti mutarono. Usare parametri costanti (φ_r , φ_{a1} , φ_{a2} , φ_{a3}) attraverso secoli di storia romana è un'ipersemplificazione estrema.

Alternative più appropriate

Se l'obiettivo era modellare la dinamica demografica degli insediamenti romani, strumenti più appropriati sarebbero stati:

Modelli a tempo discreto (difference equations): piuttosto che equazioni differenziali continue, usare modelli che evolvono per step temporali discreti (decenni o generazioni), più naturali per processi storici.

Modelli gravitazionali: ispirati alla "legge di gravità" in economia spaziale, dove il flusso tra due città è proporzionale al prodotto delle loro popolazioni e inversamente proporzionale alla distanza. Questi modelli hanno una tradizione consolidata in geografia economica.

Automi cellulari: rappresentare lo spazio come una griglia e modellare l'espansione urbana attraverso regole locali di transizione. Questo approccio è stato usato con successo in urban dynamics e archeologia del paesaggio.

Agent-based models: modellare esplicitamente gli agenti individuali (famiglie, mercanti, amministratori) e le loro decisioni, lasciando che i pattern macroscopici emergano dalle interazioni microscopiche. Questo permette di incorporare eterogeneità e decisioni strategiche.

Modelli bayesiani gerarchici: data la scarsità e incertezza dei dati archeologici, un framework esplicitamente probabilistico che quantifichi l'incertezza a ogni livello sarebbe più onesto e rigoroso.

L'equazione di Fokker-Planck, presa in prestito dalla fisica delle particelle, è forse lo strumento meno adatto a catturare le complessità dello sviluppo urbano storico guidato da decisioni umane, eventi politici, e cambiamenti tecnologici.

La questione delle unità di misura e della dimensionalità

Un problema pervasivo attraverso tutto l'apparato matematico è la mancanza di attenzione alle unità di misura e all'analisi dimensionale. Questa è una pratica fondamentale in fisica e ingegneria: ogni quantità deve avere unità ben definite, e le equazioni devono essere dimensionalmente consistenti.

Analisi dimensionale delle equazioni di movimento

Consideriamo l'equazione (2):

$$\vec{s}_{_random}(t) = [s^N_{_random}(t-\Delta t) + \mathcal{R}_N(\Delta t) \cdot \delta_N(\Delta t), \dots]$$

Se s rappresenta una velocità, deve avere dimensioni [lunghezza/tempo], per esempio km/anno o m/secolo. Il termine $s^N_{\text{random}}(t-\Delta t)$ ha quindi dimensioni [L/T].

Il termine $\mathcal{R}_N(\Delta t) \cdot \delta_N(\Delta t)$ deve avere le stesse dimensioni per poter essere sommato. Se $\mathcal{R}_N$ è adimensionale (un numero puro estratto da una distribuzione normalizzata), allora δ_N deve avere dimensioni [L/T]. Ma gli autori descrivono δ come "uno scalare algebrico", suggerendo che sia adimensionale.

Alternativamente, se δ_N è adimensionale, allora $\mathcal{R}_N$ deve avere dimensioni [L/T]. Ma questo è strano per una variabile random che gli autori descrivono come "a media zero" senza specificare altre proprietà fisiche.

Questa confusione si propaga attraverso tutte le equazioni successive. Nell'equazione (4), $|r - r_i|^3 / |r - r_i| = |r - r_i|^2$ ha dimensioni [L²]. Ma $\vec{s}_{\text{diff}}$ dovrebbe essere una velocità con dimensioni [L/T]. Come si conciliano le due cose? Deve esserci un coefficiente con dimensioni [T⁻¹] da qualche parte, ma non compare esplicitamente.

Unità nell'equazione di Fokker-Planck

Nell'equazione (7), il membro sinistro $\partial \rho / \partial t$ ha dimensioni [ρ/T]. Se ρ è una densità di popolazione, ha dimensioni [persone/L²], quindi $\partial \rho / \partial t$ ha dimensioni [persone/(L²·T)].

Il primo termine del membro destro, $-\nabla \cdot [\mathbb{f}_1 \cdot \rho]$, coinvolge una divergenza che ha dimensioni [1/L]. Quindi $\mathbb{f}_1 \cdot \rho$ deve avere dimensioni [persone/(L·T)] affinché la divergenza dia [persone/(L²·T)]. Se ρ ha dimensioni [persone/L²], allora $\mathbb{f}_1$ deve avere dimensioni [L/T], cioè velocità.

Ma nell'equazione (8), $\mathbb{f}_1 = \sqrt{1 - \mu}$, e μ è definito nell'equazione (9) come $\mu = \min(\rho, \varphi_r) / \varphi_r$. Per essere adimensionale, φ_r deve avere le stesse dimensioni di ρ , cioè [persone/L²]. Allora $\mathbb{f}_1$ è adimensionale (radice quadrata di un numero adimensionale), non [L/T] come richiesto!

Questo è un errore dimensionale fondamentale che invalida l'intera formulazione. Le equazioni come scritte non sono dimensionalmente consistenti e quindi non possono essere fisicamente corrette.

Per correggere questo, gli autori avrebbero dovuto introdurre esplicitamente una velocità caratteristica v_0 con dimensioni [L/T], scrivendo qualcosa come:

$$\mathbb{f}_1 = v_0 \cdot \sqrt{1 - \mu}$$

dove v_0 rappresenta la velocità tipica di espansione urbana. Ma questo parametro cruciale non compare mai.

I valori numerici privi di contesto

La Tabella 3 riporta $\varphi_r = 0,0066$, ma 0,0066 cosa? Se è persone/m², rappresenta una densità estremamente bassa (1 persona ogni 150 m²), forse appropriata per campagna rurale ma non per insediamenti urbani. Se è

persone/km², è incredibilmente bassa (0,0066 persone/km² significa 1 persona ogni 150 km²), una densità desertica.

Forse è in unità "normalizzate" rispetto a qualche densità di riferimento non specificata? Ma allora l'intera analisi perde ancoraggio alla realtà fisica misurabile.

Similmente, $\phi_{a1} = 0,715$ dovrebbe avere dimensioni di diffusività [L²/T]. In unità standard, i coefficienti di diffusione molecolare sono dell'ordine di 10⁻⁹ m²/s. La diffusione termica in solidi è ~10⁻⁵ m²/s. La "diffusione" di popolazioni umane potrebbe essere qualcosa come 1 km²/anno = 3·10⁻¹¹ km²/s = 3·10⁻⁵ m²/s. Ma 0,715 in quali unità?

Questa mancanza di specificazione rende i numeri della Tabella 3 completamente privi di significato fisico. Sono simboli sulla carta, non quantità misurabili nel mondo reale.

Un aspetto frustrante dello studio è che gli autori costruiscono elaborate strutture matematiche su fondamenta empiriche che non esaminano mai criticamente. Cosa sappiamo realmente sulla Via Severiana da evidenze archeologiche dirette? Gli autori menzionano che "oggi rimangono solo poche tracce visibili dell'antica strada." Specificamente, vengono citati:

- Frammenti di pavimentazione nella pineta di Castel Fusano
- Resti presso il Canale dei Pescatori a Ostia
- Lacerti nella necropoli dell'Isola Sacra

Questo è tutto? Per una strada che presumibilmente si estendeva per decine di chilometri lungo la costa, abbiamo solo frammenti dispersi di pavimentazione? Questo dovrebbe immediatamente sollevare domande sulla certezza con cui possiamo ricostruire il tracciato completo.

In archeologia delle infrastrutture romane, la tracciabilità di una strada dipende da molteplici linee di evidenza convergenti:

Tracce fisiche dirette: pavimentazione in situ, ponti, mura di contenimento, solchi di carri nelle rocce.

Tracce indirette: miliari (pietre che marcavano le distanze), stazioni di posta (mutationes, mansiones), necropoli lungo la strada (i romani seppellivano i morti lungo le strade), depositi di materiale stradale.

Evidenze topografiche: anomalie lineari in fotografie aeree, allineamenti di parcelle agricole moderne che rispettano tracciati antichi, terrazzamenti.

Fonti scritte: menzioni in autori antichi, itinerari, carte geografiche antiche.

Per la Via Severiana, gli autori citano principalmente la Tabula Peutingeriana stessa come fonte, creando una circolarità viziosa: usano la Tabula per ricostruire la strada, poi pretendono di validare la precisione della Tabula basandosi su quella ricostruzione.

Le stazioni fantasma

La Tabella 2 include "Clostra" con identificazione moderna marcata da un punto interrogativo. Questo significa che non sappiamo dove fosse. Ma allora come possiamo includere Clostra nel modello matematico? Se non conosciamo la sua posizione, come possiamo calcolare distanze, velocità di movimento, interazioni con altri landmarks?

Più in generale, l'intero modello presuppone che conosciamo le posizioni dei landmarks con precisione sufficiente per calcolare $|r - r_i|$ con significato. Ma se l'incertezza sulla posizione di Clostra è, diciamo, ± 5 km, e la distanza tra Clostra e la stazione successiva è 10 km, l'incertezza relativa è del 50%! Come possono equazioni che dipendono da distanze al cubo ($|r - r_i|^3$) produrre risultati affidabili con tali incertezze?

Un approccio rigoroso avrebbe richiesto di:

- Quantificare esplicitamente l'incertezza su ogni identificazione. Per Torre Astura, forse l'incertezza è solo ± 100 m (sito ben documentato). Per Clostra, forse ± 5 km o più.
- Propagare l'incertezza attraverso i calcoli. Usando metodi Monte Carlo o analisi di sensibilità, determinare come l'incertezza negli input (posizioni dei landmarks) si propaga alle output (parametri del modello, predizioni).
- Fornire intervalli di confidenza piuttosto che valori puntuali. Non "la distanza è 13,400 km" ma "la distanza è $13,4 \pm 2,1$ km con 95% di confidenza".

Gli autori non fanno nulla di tutto questo, trattando tutte le identificazioni come se fossero certificate con precisione GPS moderna.

Il problema del "reference frame"

C'è anche una questione metodologica sottile ma importante: rispetto a quale sistema di riferimento vengono misurate le posizioni? Quando gli autori dicono che un landmark è alla posizione $r = (E, N)$, cosa significano esattamente E e N?

Sono coordinate moderne (latitudine/longitudine o UTM)? Ma le coordinate moderne si basano su datum geodetici (WGS84, etc.) che ovviamente non esistevano nell'antichità.

Sono coordinate rispetto a Roma come origine? Ma Roma è una città estesa; quale punto specifico è l'origine? Il Foro? Il Miliarum Aureum (la colonna d'oro da cui tutte le strade partivano simbolicamente)?

Questa può sembrare pedanteria, ma in un lavoro che pretende di misurare precisione con modelli matematici sofisticati, questi dettagli tecnici sono essenziali. La posizione è definita rispetto a un sistema di coordinate ben specificato, e trasformazioni tra sistemi diversi introducono errori e complicazioni.

Un aspetto sorprendente dell'articolo è il suo quasi completo isolamento dalla letteratura rilevante in archeologia, storia della cartografia, e geografia storica. Le citazioni sono quasi tutte a lavori degli stessi autori (autocitazioni su altri progetti tecnologici) o a fonti archeologiche datate del XIX secolo.

Geografia storica e cartografia antica

Esiste un'ampia letteratura specialistica sulla Tabula Peutingeriana. Studiosi come Richard Talbert, Emily Albu, Pascal Arnaud, e molti altri hanno prodotto analisi dettagliate della natura, scopo, accuratezza e limitazioni della Tabula. Per esempio Talbert ha analizzato sistematicamente le distorsioni della Tabula, mostrando che non è semplicemente "imprecisa" in modo random, ma ha distorsioni sistematiche legate al suo formato (rotolo lungo e stretto) e al suo scopo pratico. Arnaud ha confrontato la Tabula con altri itinerari antichi, identificando pattern di errori comuni e fonti condivise.

Gli autori citano superficialmente Talbert in un paio di punti, ma non si confrontano mai seriamente con le conclusioni di questa letteratura. Non discutono, per esempio, come le loro "misurazioni di precisione" facciano tesoro delle analisi precedenti. Non situano il loro lavoro nel contesto delle controversie esistenti sull'interpretazione della Tabula.

Dinamica urbana e insediamenti romani

Esiste anche una ricca letteratura su modelli di insediamento romano, dinamiche di popolamento, e sviluppo delle reti stradali. Lavori di archeologi del paesaggio come Graeme Barker, John Bintliff, e molti altri hanno sviluppato sofisticate metodologie per analizzare distribuzioni spaziali di insediamenti usando survey sistematici.

Questi studi hanno prodotto datasets empirici proprio del tipo che sarebbe necessario per calibrare e validare i modelli matematici proposti da Petritoli e Leccese. Eppure, questa letteratura non viene mai menzionata o utilizzata.

Modellazione matematica in archeologia

C'è anche una tradizione crescente di modellazione quantitativa in archeologia. Lavori che usano agent-based models per simulare l'espansione di civiltà, modelli di network per analizzare reti commerciali, metodi statistici avanzati per analizzare distribuzioni spaziali.

Per esempio, il Santa Fe Institute ha prodotto modelli sofisticati della dinamica dei pueblo nel Sud-Ovest americano. Timothy Kohler e altri hanno usato simulazioni computazionali estensive, calibrate su dati archeologici dettagliati, per comprendere pattern di insediamento e collasso.

Questi lavori fornirebbero modelli metodologici su come applicare rigorosamente matematica e simulazione ad archeologia. Ma non vengono citati né usati come benchmark metodologici.

In definitiva, questo articolo rappresenta un tentativo interessante ma incompleto di creare un ponte tra storia e matematica. Gli autori hanno costruito due pilastri solidi su ciascuna sponda del fiume interdisciplinare, ma il ponte che li dovrebbe connettere rimane incompiuto, lasciando un vuoto che nessuna quantità di formalismo matematico o narrazione storica può colmare da sola.

Non spetta allo scrivente dare suggerimenti per eventuali ulteriori indagini sull'argomento. Ma una rigorosa ricostruzione storica che può ben avvalersi della matematica più raffinata dovrebbe raccogliere sistematicamente dati quantitativi dalle fonti storiche, dalla Tabula stessa, da survey archeologici e quantificare precisamente le distanze, stimare popolazioni storiche, misurare velocità di espansione urbana da sequenze stratigrafiche.

Solo attraverso questo tipo di rigore metodologico l'incontro tra matematica e storia può essere realmente fruttuoso, producendo non solo eleganza formale ma comprensione genuina e cumulativa di come civiltà antiche come quella romana hanno plasmato e sono state plasmate dai loro paesaggi.

Table 1. Ancient Stations.

Station	Distance	
Astura	VII miglia	10.400 km
Clostris	IX miglia	13.400 km
ad Turres albas	III miglia	4.500 km
Circeios	XII miglia	18.000 km
Ad Turres	IV miglia	6.000 km
Terracina	IX miglia	16.300 km

Table 2. Modern Stations.

Ancient station	Distance	New Position
Asturam	VII miglia	Torre Astura
Clostra	IX miglia	?
Ad Turres Albas	IV miglia	San Donato
Circeios	XXIII miglia	Torre Paola
Ad Turres	IV miglia	Torre Olevola
Terracinam	IX miglia	Terracina

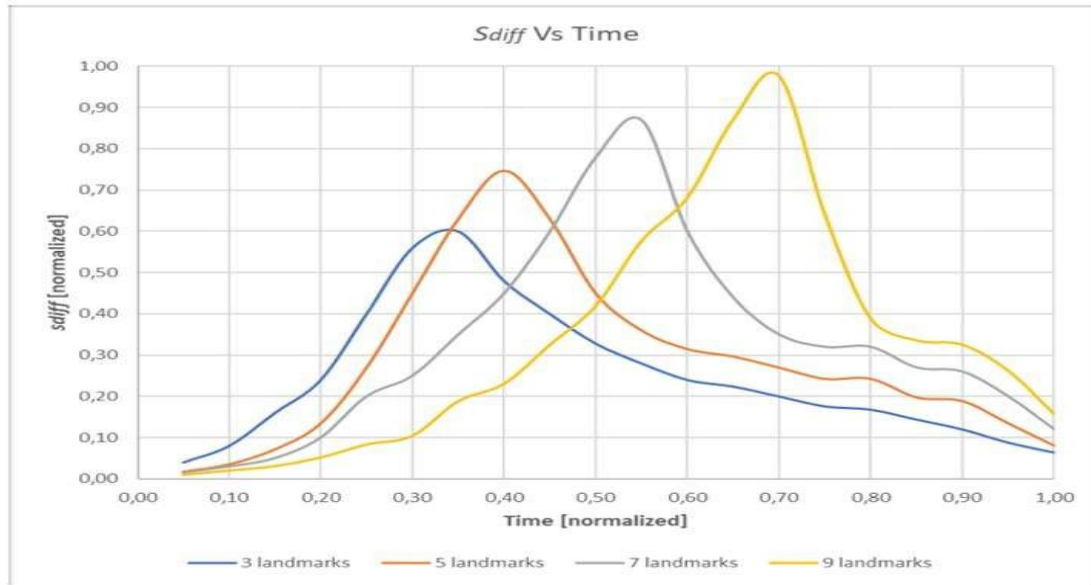


Figure 4. Speed of the landmark vs time: parametric curves with 3, 5, 7 and 9 bases (time and speed are normalized).

Table 3. Parameters of the simulation.

Parameter	Value
φ_r	0.0066
φ_{a1}	0.715
φ_{a2}	5
φ_{a3}	0.099

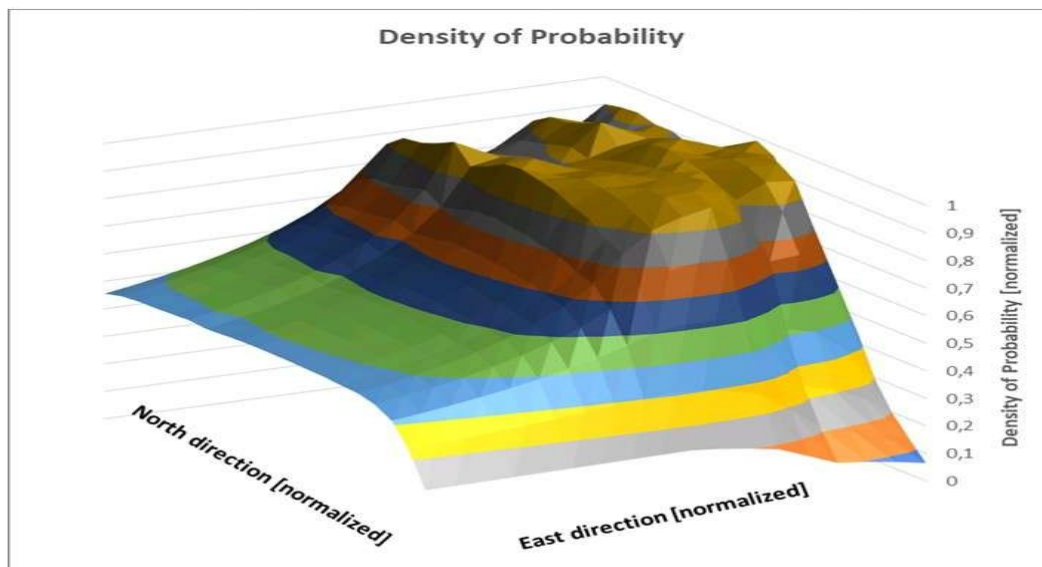


Figure 5. Density of probability vs surface directions.